

волны. – 2007. – С. 16–27. 4. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И., Сенник Н.А., Фильштинский М.Л. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т. II. Статические и динамические задачи электроупругости для составных многосвязных тел. – М.: КомКнига, 2005. – 376 с. 5. Chen W.Q., Cai J.B., Ye G.R., Wang Y.F. Exact three-dimensional solutions of laminated orthotropic piezoelectric rectangular plates featuring interlaminar bonding imperfections modeled by a general spring layer // IJSS. – 2004. – V. 41. Iss. 12. – P. 5247–5263. 6. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа. 1965. – 466 с. 7. Lamm P.K., Thomas L.Scofield. Sequential predictor-corrector methods for the variable regularization of Volterra inverse problems. // Inverse problems. – 2000. – V. 16. – P. 373–399. 8. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. – М., Наука. 1990. – 229 с. 9. Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Воронай А.В., Шарапата А.С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с.

Поступила в редколлегию 14.04.2008.

УДК 539.3

Е.Г.ЯНЮТИН, докт.техн.наук; **Н.И.КУЧЕРОВА**; НТУ «ХПИ»

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СОСРЕДОТОЧЕННОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА БЕСКОНЕЧНУЮ ПЛАСТИНУ-ПОЛОСУ

Розглянуто рішення прямої та оберненої нестационарних задач для нескінченної пластини-полоси. Досліджується дія на пластину імпульсного навантаження. Пластина-полоса моделюється теорією Кірхгофа-Лява. При розв'язку інтегрального рівняння Вольтерра застосовується метод А.С.Апарцина.

Solutions of direct and inverse non-stationary problems for infinite plate-strip are considered. An impulse load action on plate is explored. The simulation of the plates-strip deforming is based on classic Kirchhoff's theory. The Volterra integral equations are solved by using Aparcin's method.

В данной работе представлены решения прямой и обратной задач для бесконечной пластины-полосы под воздействием импульсной нагрузки. В ней производится дальнейшее развитие способов идентификации (распознавания) внешних импульсных воздействий на элементы конструкций по их проявлениям деформационного характера, наблюдающимся в некоторых точках нагружаемых упругих тел. В качестве объекта исследования выбрана бесконечная пластина-полоса, нагружаемая нестационарно. Аналогичные исследования были выполнены ранее, например, для стержней, пластин круглой и прямоугольной форм и для цилиндрических оболочек конечной длины. Описания соответствующих решений представлена в монографии [1].

В связи с тем, что решение обратной задачи в значительной степени базируется на решении соответствующей прямой задачи, то целесообразно в начале настоящей работы привести решение прямой задачи в предположении, что импульсная нагрузка, действующая на деформируемый объект, задана, то есть известна.

Рассмотрим прямоугольную пластину, ограниченную прямыми $x = 0$; $x = l$. Вдоль оси y пластина является бесконечной при $y \rightarrow \pm\infty$ (рис. 1).

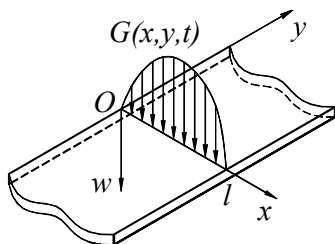


Рисунок 1 – Схема нагружения пластины-полосы

1. Решение прямой задачи. Прямая задача о нестационарных колебаниях сводится к решению уравнения классической теории поперечных колебаний пластины

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(x, y, t), \quad (1)$$

где $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жесткость; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; h – толщина пластины; w – прогиб; ρ – объемная плотность материала; t – время; $P(x, y, t)$ – функция, описывающая нормальную поперечную нагрузку.

Задачу решаем с начальными условиями: $w|_{t=0} = 0$; $\frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 0$ и краевыми условиями, заданными на границе бесконечной пластины-полосы: $w|_{x=0} = 0$; $w|_{x=l} = 0$; $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=0, l} = 0$; $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} w(x, y, t) = 0$.

Пусть внешняя нагрузка интенсивностью во времени $P(t)$ сосредоточена вдоль линии $y = 0$, а по переменной x изменяется по закону синуса, то есть $P(x, y, t) = P(t)\delta(y)\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$, где $\delta(y)$ – дельта-функция.

Решение уравнения (1) было произведено с помощью использования преобразований Лапласа и Фурье [2, 3]. Оно осуществлялось аналогично построению решения для мембраны-полосы [4] и имеет вид

$$w(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{c\rho h} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \frac{P(\tau)}{(c_1^2 + z^2)} \cdot \sin c(c_1^2 + z^2)(t - \tau) d\tau \cdot \cos|yz| dz \cdot \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (2)$$

где $c = \sqrt{D/\rho h}$; $c_1 = \pi/l$.

Для численного нахождения прогиба расчет по выражению (2) производился с применением матричной формы записи. Для чего применялось следующее соотношение

$$\mathbf{w} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}, \quad (3)$$

где \mathbf{A} – матрица, соответствующая ядру $K(t - \tau)$, элементы которой находятся по формуле $a_{ji} = K[(j - i) \cdot \Delta t]$; $\Delta t = T/M$ – шаг во времени (T – рассматриваемый промежуток времени; M – количество разбиений промежутка времени,

принятом при исследовании). В нашем случае

$$K(t) = \frac{\Delta z'}{\pi \cdot c \cdot \rho \cdot h} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{\sin \left[c \cdot \left[c_1^2 + (n \cdot \Delta z')^2 \right] \cdot (m \cdot \Delta t) \right] \cdot \cos \left[y \cdot (n \cdot \Delta z') \right]}{c_1^2 + (n \cdot \Delta z')^2};$$

здесь $\Delta z' = Z/N$ – шаг интегрирования (Z – интервал интегрирования).

При численных расчетах согласно соотношению (3) принимались следующие исходные данные: функция $P(t)$ изменялась как единичная функция Хевисайда ($P(t) = P_0 \cdot H(t)$), где интенсивность действующей нагрузки $P_0 = 105$ Н; $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па; $h = l/11$ м; $l = 0,4$ м; $\nu = 0,3$; $\rho = 7800$ кг/м³. Кривая прогиба, получаемая в соответствии с выражением (3), представлена на рис. 2 (кривая 3).

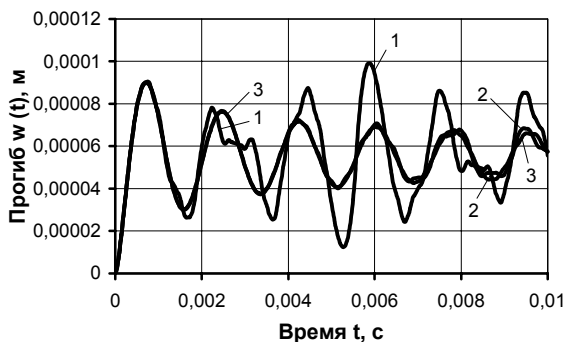


Рисунок 2 – Изменение прогиба во времени

Для проверки достоверности полученного решения сравним его с решением для пластины ограниченных размеров прямоугольной формы, которое получаем для варианта пластины тоже теории Кирхгофа-Лява.

Упомянутое решение уравнения (1), отвечающее колебаниям прямоугольной пластины, описываются следующим выражением

$$w(x, y_1, t) = \frac{2P_0}{b\rho h} \cdot \sum_{n=0}^N \left[\frac{1 - \cos c_2 \lambda_n t}{(c_2 \lambda_n)^2} \cdot \sin \frac{n\pi \xi}{b} \cdot \sin \frac{n\pi y_1}{b} \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \right]. \quad (4)$$

Выражение (4) записано в декартовой системе координат (x, y_1) . Связь между y и y_1 в формулах (2) и (4) такова, что ордината $\xi = b/2$ отвечает середине вдоль длины пластины. В формуле (4) b – длина пластины, a – ее ширина, $c_2 = \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$, $\lambda_n = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$. Кривые, получаемые при численном анализе

данного выражения, показаны на рис. 2, причем кривая 3 соответствует кривой на рис. 2, если параметр b принять равным 20 м. Хорошая сопоставляемость указанных кривых и подтверждает достоверность полученного решения (3). Укажем также, что кривая 1 – $b = 2$ м; кривая 2 – $b = 10$ м.

2. Решение обратной задачи. Для нахождения неизвестной нагрузки (ее восстановления или идентификации) использовалось выражение (3) и числен-

ные значения перемещения во времени $w(x,y,t)$, которые были получены при решении прямой задачи. Эти значения являлись исходными данными для выполнения тестового расчета. Обратная задача является некорректной и сводится в своей основе решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода [5].

С целью избежания математических трудностей при решении некорректной обратной задачи, присущих численному анализу уравнения Вольтерра первого рода, можно перейти к уравнению Вольтерра второго рода, выполнив, например, дифференцирование по времени соответствующего уравнения для неизвестной нагрузки. С учетом отмеченного, выражение для определения временной составляющей неизвестной нагрузки будет иметь вид

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{w}', \quad (5)$$

где \mathbf{A}^{-1} – обратная матрица; \mathbf{w}' – скорость изменения перемещения, и она равна $\mathbf{w}' = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{P}$. Здесь \mathbf{A}' – матрица, соответствующая продифференцированному ядру $K(t - \tau)$ по времени, и это ядро равно

$$K(t)' = \frac{\Delta z'}{\pi \cdot \rho \cdot h} \cdot \sum_{n=1}^N \cos[c \cdot (c_1^2 + (n \cdot \Delta z')^2) \cdot m \Delta t] \cdot \cos[y \cdot (n \cdot \Delta z')]. \quad (6)$$

Рассмотрим случай, когда точка регистрации перемещения удалена от точки приложения нагрузки, то есть $y \neq 0$, а именно примем, что $y = 0,14$ м. На основании выражения (5) и численных данных, которые использовались ранее при решении прямой задачи, получим кривые изменения нагрузки во времени. Соответствующие кривые изменения перемещения (кривая 1) и его скорости (кривая 2), отвечающие решению прямой задачи, представлены на рис.3. Подчеркнем, что данные, представленные на рис. 3, используются при решении обратной задачи в качестве исходных.

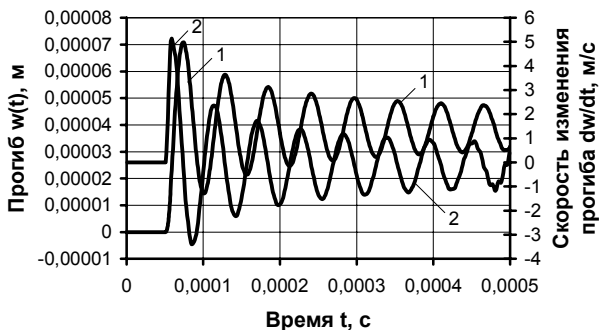


Рисунок 3 – Изменение прогиба и его первой производной во времени

На рис. 4 представленная кривая («ступенька» Хевисайда), идентифицированная по приведенным исходным данным.

Как видно из рисунка, кривая изменения нагрузки соответствует функции $P(t) = P_0 \cdot H(t)$, которая принималась для решения прямой задачи.

В заключение рассмотрим произвольное задание нагрузки на анализе одного примера.

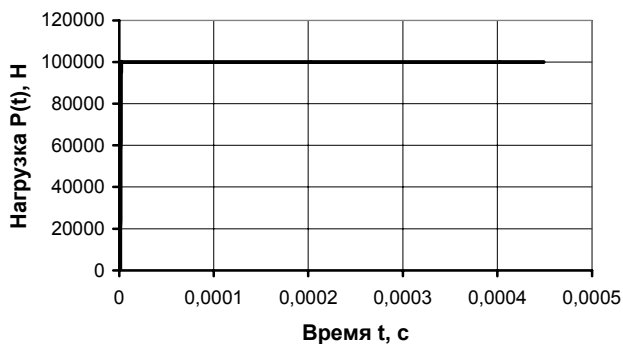


Рисунок 4 – Изменение нагрузки во времени

Пример: прогиб (сплошная линия) в точке пластины $y = 0,14$ м, как функция времени, и его скорость (пунктирная линия) изменения имеют вид, представленный на рис. 5.

Выполнив процедуру восстановления воздействующей нагрузки, получим ее изменение во времени, график которой приведен на рис. 6.

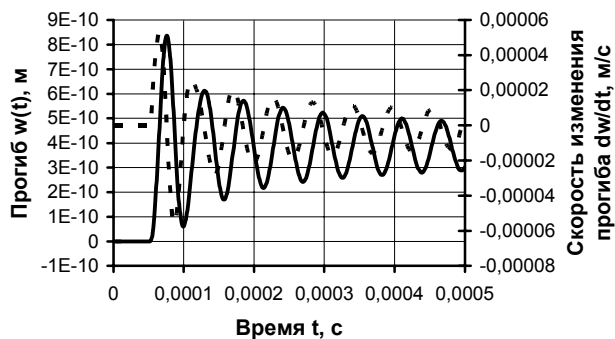


Рисунок 5 – Изменение прогиба и его первой производной во времени

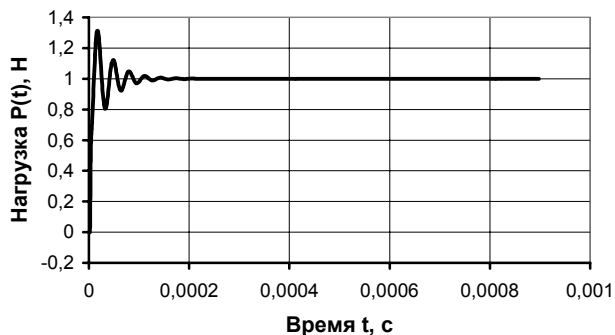


Рисунок 6 – Изменение нагрузки во времени

Если произвести расчет прогиба пластины в соответствующей точке по идентифицированной нагрузке, используя соотношения прямой задачи, то будем иметь кривую прогиба, совпадающую с кривой на рис. 5 на визуальном уровне восприятия.

Рассмотренные задачи относятся к типу динамических задач теории упругости. Обратная задача – некорректная, – она сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода с невырожденным ядром, численное решение которого было осуществлено способом, близким к методу квадратур, предлагаемым А.С.Апарциным [5]. Применение этого подхода позволило получить решение поставленной обратной задачи сравнительно простым способом, обладающим свойством регуляризации при соответствующем подборе расчетных параметров.

Список литературы: 1. Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Воронай А.В., Шарапата А.С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с. 2. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1966. – 405 с. 3. Снедон И. Преобразование Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 667 с. 4. Янютин Е.Г., Кучерова Н.И. Определение влияния сосредоточенного нестационарного воздействия на мембрану-полосу // Вестник ХНАДУ. – 2006. – 32. – С. 80-83. 5. Апарцин А.С. О численном решении систем интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратур // Иркутск. – 1976. – Вып. 4. – С. 79 – 88.

Поступила в редколлегию 12.04.2007.

УДК 621.9.048.6

Т.С.ЯРОШЕВИЧ, ЛНТУ, Луцьк

МОДЕЛЮВАННЯ ПОДВІЙНОГО ПУСКУ ВІБРАЦІЙНОЇ МАШИНИ З ДЕБАЛАНСНИМ ЗБУДНИКОМ КОЛИВАНЬ

Викладено результати досліджень динамічних процесів, що відбуваються під час розбігу дебалансного збудника резонансної вібраційної машини з електродвигуном обмеженої потужності. Розглянуто перебіг процесу розбігу збудника в разі подвійного пуску асинхронного двигуна. Наведено детальний опис ефекту Зоммерфельда.

The course of the process of acceleration of unbalanced exciter of transresonance vibrating machine in case of reclosing is considered. The explanation of Sommerfelds effect is given.

Постановка проблеми. Область використання вібраційних машин та пристроїв має стійку тенденцію до подальшого росту в найрізноманітніших галузях машино- та приладобудування. У великогабаритних вібраційних машинах найбільшого розповсюдження отримав інерційний привод завдяки можливості одержання значних збудюючих сил за невеликих габаритів та відносно малої маси. Зазвичай, вібраційні машини з інерційним збудженням є резонансними. Одночасні вібромашини з дебалансними збудниками в разі м'якої віброізоляції робочого органу передають на раму та фундамент порівняно незначні динамічні навантаження. Під час роботи в усталеному режимі таким машинам притаманна достатньо висока стабільність.